**РЯДЫ ФУРЬЕ**

**1.Ортогональная система функций.**

**Определение 1.** Система функций

, называется *орто-нормированной* на интервале , если:

1) , если (ортогональность);

**Замечание 1.** Если условие 2) не выполнено, то есть , то система

будет нормированной.

**Замечание 2.** В пространстве функций интеграл из условия 1) определения 1 играет роль скалярного произведения, а ортонормированная система играет ту же роль, что единичные векторы в трёхмерном векторном пространстве.

Легко доказывается следующая

**Теорема 1.** Тригонометрическая система функций

(1)

является ортогональной на интервале , а также для неё справедливы равенства:

*=,*

**2. Тригонометрический ряд.**

Пусть числа таковы, что сходится числовой ряд

*.*

Тогда в силу ограниченности синуса и косинуса будет сходиться на всей числовой оси *тригонометрический ряд*

.

Обозначим его сумму через :

(2)

Очевидно, функция является -периодической: .

Выясним, как связаны коэффициенты с суммой ряда (2).

Умножив обе части равенства (2) на и проинтегрировав почленно по интервалу , в силу теоремы 1 получим:

*.* (3)

Умножив обе части равенства (2) на и проинтегрировав почленно по интервалу , в силу теоремы 1 получим:

*.* (4)

Аналогичным образом, умножив обе части равенства (2) на и проинтегрировав почленно по интервалу , в силу теоремы 1 получим:

*.* (5)

Заметим, что почленное интегрирование в правых частях получающихся равенств во всех трёх случаях правомерно.

**Замечание 3.** Связь формулами (3), (4), (5) коэффициентов с суммой тригонометрического ряда аналогична тому, как вычисляются координаты разложения вектора по ортонормированной системе векторов

**3. Теорема Дирихле о разложении 2l-периодической функции в ряд Фурье.**

Пусть - -периодическая функция: . Вычислим по формулам (3), (4) и (5) коэффициенты , и , называемые *коэффициентами Фурье функции .*

Поставим функции в соответствие ряд

(с коэффициентами Фурье), *называемый рядом Фурье* *функции*

Зададимся вопросом, при каких условиях сумма ряда равна значению функции Ответ на этот вопрос даёт следующая

**Теорема 2 (Дирихле).** Пусть -периодическая функция на интервале имеет конечное число точек строгого экстремума и может иметь только конечное число точек разрыва, причем только первого рода. Тогда она разлагается в ряд Фурье

(6)

где

, , (7)

- соответственно правосторонний и левосторонний пределы функции в точке , то есть ,

*.*

**Замечание 1.** Если - точка непрерывности функции , то

**Замечание 2.** В силу периодичности подынтегральных функций коэффициенты Фурье можно вычислять по формулам:

, ,

где - произвольное число, в частности, может равняться нулю, то есть

, , (8)

**4. Ряд Фурье для чётной и нечётной функций.**

Если функция чётная, то есть , то и ряд Фурье примет вид:

;

при этом коэффициенты и можно вычислять по формулам:

, (9)

Если функция нечётная, то есть , то и ряд Фурье примет вид:

;

при этом коэффициенты можно вычислять по формулам:

. (10)

**5. Разложение в ряд Фурье функции, заданной на конечном интервале.**

Для того, чтобы разложить в ряд Фурье функцию, заданную на конечном интервале , нужно продолжить её периодическим образом, взяв период равным длине интервала : , то есть .

**6. Ряд Фурье в амплитудно-фазовой форме.**

Введём обозначения: , , . Заметим, что . Введём угол такой, что , . Тогда tg, откуда

Выполним преобразования:

.

Тогда равенство (6) примет вид:

.

Такая форма ряда Фурье называется *амплитудно-фазовой.*

Функция называется -*ой* *гармоникой, амплитудой* -*ой* *гармоники, частотой* -*ой* *гармоники, фазой* -*ой* *гармоники.* Еслито фаза не определена.

Множество чисел называется *амплитудным спектром,* множество чисел называется *частотным спектром.* Напомним, что , то есть - это числа, кратные .

Если -периодическая функция описывает звуковой сигнал, то, оказывается, что этот сигнал можно разложить на сумму гармоник, каждая из которых звучит со своей частотой , амплитудой (силой звука) и сдвигом по фазе .

Из сходимости ряда Фурье следует, что

**6. Примеры разложения функций в ряд Фурье.**

**Пример 1.** Разложить функцию

в ряд Фурье по синусам и косинусам;

начертить график разложения;

найти амплитуду и фазу первой гармоники.

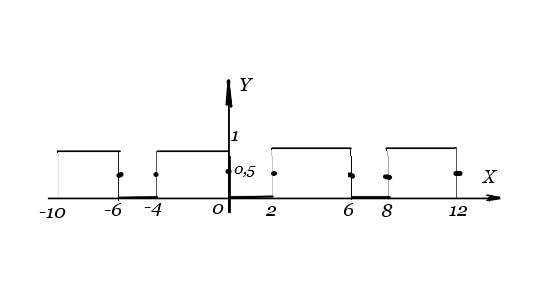
*Решение.* Продолжим функцию периодическим образом с периодом . Тогда Вычислим коэффициенты Фурье по формулам (8). Имеем:

;

,

*.*

Начертим график разложения .

**

На рисунке указано, что в точках разрыва функции сумма ряда равна среднему арифметическому между правосторонним и левосторонним пределами функции, а именно, равна 0,5.

Вычислим теперь амплитуду и фазу первой гармоники. Имеем:

,

, =.

Поскольку то .

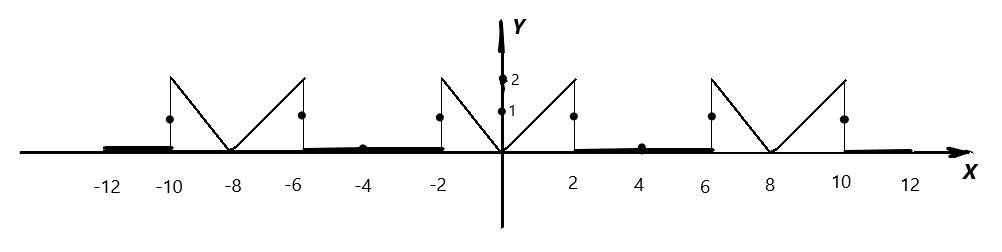
**Пример 2.** Разложить функцию

в ряд Фурье только по косинусам;

начертить график разложения;

найти амплитуду и фазу второй гармоники.

*Решение.* Для того, чтобы разложитьзаданную функцию только по косинусам, нужно сначала продолжить её чётным образом, а затем продолжить полученную функцию периодическим образом. При этом период будет равен 8, то есть . Построим сначала график разложения в ряд Фурье.



В точках продолженная периодическим образом функция будет непрерывной. А в точках она разрывна, и , следовательно, ряд Фурье в этих точках будет сходиться к среднему арифметическому между левосторонним и правосторонним пределами функции в этих точках, то есть к

Вычислим теперь коэффициенты Фурье. Как было сказано выше, А коэффициенты и вычислим по формулам (9).

*.*

Таким образом, получили следующее разложение:

.

Вычислим амплитуду и фазу второй гармоники. Имеем:

, ==

==.

Поскольку то

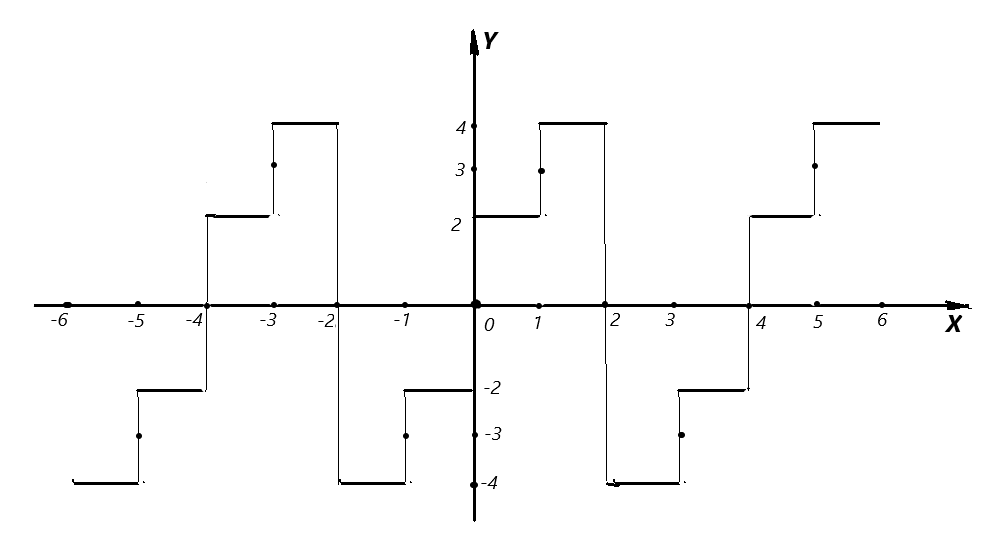
**Пример 3.** Разложить функцию

в ряд Фурье только по синусам;

начертить график разложения;

найти амплитуду и фазу второй гармоники.

*Решение.* Для того, чтобы разложитьзаданную функцию только по синусам, нужно сначала продолжить её нечётным образом, а затем продолжить полученную функцию периодическим образом. При этом период будет равен 4, то есть . Построим сначала график разложения в ряд Фурье.



В точках разрыва в точках разрыва ряд Фурье сходится к значению в точках разрыва ряд Фурье сходится к значению

Приступим к вычислению коэффициентов Фурье. В силу нечётности построенной функции Коэффициенты вычислим по формуле (10)

*.*

Тогда искомое разложение будет иметь вид:

.

Вычислим амплитуду и фазу второй гармоники.

Поскольку , , то

Определим фазу

Поскольку то =

***Задача для самостоятельного решения.***

**Пример 4.** Разложить функцию

в ряд Фурье:

а) по синусам и косинусам;

б) по косинусам;

в) по синусам.

Во всех трёх случаях начертить графики разложений и найти амплитуды и фазы первых гармоник.

***Задания для контрольной работы.***

Пусть номер студента по журналу , то есть - число десятков, а - число единиц (если то если то ).

Разложить функцию

в ряд Фурье:

а) по синусам и косинусам;

б) по косинусам;

в) по синусам.

Во всех трёх случаях начертить графики разложений и найти амплитуды и фазы первых гармоник.

**6. Ряд Фурье в комплексной форме.**

Пусть, как и выше, Если воспользоваться формулами , ,

, то ряду Фурье для -периодической функции (6) можно придать вид:

, (11)

где

, (12)

. (13)

Действительно,

*.*

Положим

,

,

.

Тогда ряд Фурье можно записать в виде:

.

Поменяв во втором ряде индекс суммирования на , придём к формулам (11), (12), (13).

Функция называется *n*-ой комплексной гармоникой, а коэффициент комплексной амплитудой этой гармоники.

Коэффициенты можно вычислять по формулам

(14)

с произвольным *a.*

**Пример 5.** Разложить функцию , в ряд Фурье.

*Решение.* Продолжим функцию периодическим образом с периодом то есть Очевидно, что эту функцию удобнее раскладывать в ряд Фурье в комплексной форме.

Имеем:

*===*

*==*

*=.*

*.*

В точках разрывов функции , , ряд Фурье сходится к значению

**Пример 6.** Разложить функцию , в ряд Фурье.

*Решение.* Продолжим функцию периодическим образом с периодом то есть Заметим, что поскольку

то полученная функция будет непрерывной на всей числовой оси. Очевидно, что эту функцию тоже удобно раскладывать в ряд Фурье в комплексной форме. В самом деле,

.

Тогда имеем:

*=*

*=*

*=*

*=,*

*.*

Заметим, что эту функцию нетрудно разложить в тригонометрический ряд, если при вычислении коэффициентов воспользоваться известными тригонометрическими формулами преобразования произведений синусов и косинусов в суммы синусов и косинусов. Поскольку разлагаемая функция является чётной (она так продолжена на всю числовую ось), то это разложение окажется только по косинусам.

А мы сейчас получим это разложение из ряда Фурье в комплексной форме.

Преобразуем ряд следующим образом:

.

Во второй сумме поменяем индекс суммирования *n* на , а в первой отдельно выпишем слагаемое с Тогда получим:

+=

,

***Задачи для самостоятельного решения.***

Пусть - номер студента по журналу, где - число десятков, а - число единиц. Разложить в ряд Фурье функцию

*, x.*

**7. Интеграл Фурье.**

Напомним, что в ряд Фурье разлагаются периодические функции, или функции, заданные на конечном интервале, которые можно продолжить периодическим образом. А как быть с непериодическими функциями, заданными на бесконечном интервале? Оказывается, их можно разлагать в интеграл Фурье.

Пусть функция абсолютно интегрируема на всей числовой оси, то есть удовлетворяет условию

*.*

Пусть на каждом конечном интервале функция удовлетворяет условиям Дирихле. Разложим функцию в ряд Фурье

,

где

*,*  , .

Преобразуем ряд Фурье следующим образом:

*==*

*=*

*=*

где . Сумма в правой части полученного равенства представляет собой интегральную сумму интеграла

.

В силу абсолютной интегрируемости функции имеем:

=.

Тогда, устремив к , получим:

. (15)

Расписав косинус разности, получим:

,

откуда получим:

, (16)

где , .

Это и есть интеграл Фурье функции Функции и называются спектральными функциями.

Напомним, что в точках непрерывности функции справедливо равенство

Объясним, каким образом ряд Фурье превращается в интеграл Фурье.

Чем больше полупериод , тем гуще расположены на числовой оси точки частотного спектра , . При предельном переходе спектр превращается в непрерывный и заполняет полуось [ А наборы коэффициентов { и { превращаются в спектральные функции и .

**8. Интеграл Фурье для чётной и нечётной функций.**

а) Пусть функция чётна: . Тогда , а функцию

можно вычислить по формуле

Разложение (16) примет вид:

. (17)

Введём функцию

. (18)

Тогда равенство (17) можно записать в виде:

. (19)

Функция , определённая равенством (18), называется косинус-преобразованием Фурье чётной функции , а равенство (19) – обратным преобразованием Фурье.

В точках непрерывности функции формулы (18) и (19) симметричны.

б) Пусть функция нечётна: . Тогда , а функцию можно вычислить по формуле

Разложение (16) примет вид:

. (20)

Введём функцию

. (20)

Тогда равенство (20) можно записать в виде:

. (21)

Функция , определённая равенством (20), называется синус-преобразованием Фурье нечётной функции , а равенство (21) – обратным преобразованием Фурье.

В точках непрерывности функции формулы (20) и (21) симметричны.

**9. Интеграл Фурье в комплексной форме.**

Запишем интеграл Фурье в виде (15):

. (22)

Заметим, что подынтегральная функция в (22) чётна по . Тогда (22) можно записать в виде:

. (23)

Справедливо равенство

(24)

в силу нечетности по подынтегральной функции в (22).

Поскольку , то вычтя из правой части равенства (23) левую часть равенства (24), получим:

*.* (25)

Введя обозначение

, (26)

из (25) получим интеграл Фурье в комплексной форме:

. (27)

Функция называется спектральной функцией.

Если ввести функцию

*,* (28)

то из (27) получим:

. (29)

Функция называется преобразованием Фурье функции , а равенство (29) – обратным преобразованием Фурье.

**Пример 7.** Разложить в интеграл Фурье в комплексной форме функцию

*Решение.* Найдём спектральную функцию:

*.*

Тогда получим разложение функции в ряд Фурье в виде:

.

**10. Ряд Фурье по произвольной орто-нормированной системе функций.**

Чтобы придать изложенным ниже утверждениям геометрическую интерпретацию, заметим, что если в пространстве функций, скажем, удовлетворяющих условию Дирихле, определить скалярное произведение по формуле

,

то ему будут соответствовать «длина вектора » (называемая нормой), определённая равенством , и «расстояние» между , определённое равенством

.

Пусть , - орто-нормированная система функций. Пусть коэффициенты , таковы, что сходится функциональный ряд

,

и его сумма равна :

, . (30)

Всякий такой ряд называется рядом Фурье по орто-нормированной системе функций а коэффициенты называются коэффициентами Фурье функции

Умножив обе части равенства (30) на и проинтегрировав почленно (предполагая, что почленное интегрирование правомерно), в силу орто-нормированности системы получим:

=

Это соответствует тому, что если

*,* то , , .

Пусть , - сумма ряда (30). Покажем, что интеграл

(31)

принимает минимальное значение при .

В силу орто-нормированности системы получим:

=+=

++=

=. (32)

Отсюда видно, что, действительно, наименьшее значение интеграла (31) достигается, если .

Это соответствует тому, что наилучшим приближением вектора

векторами, лежащими в плоскости , является составляющая этого вектора , лежащая в плоскости , или, иными словами, кратчайшее расстояние между точкой и плоскостью равно длине отрезка перпендикуляра, опущенного из этой точки на плоскость.

Поскольку интеграл (31) неотрицательный, то при из (32) получим:

. (33)

Неравенство (33) называется неравенством Бесселя.

Можно доказать, что если устремить к бесконечности, то из неравенства Бесселя следует равенство

, (34)

называемое равенством Парсеваля.

Равенство Парсеваля является аналогом того , что если

, то .

Заметим, что если не обосновывать правомерность перемножения бесконечных рядов и почленного интегрирования получающихся при этом рядов, то равенство Парсеваля можно получить следующим образом:

=

=.